

SÚLYOK MEGHATÁROZÁSA PÁROS ÖSSZEHASONLÍTÁS MÁTRIXOK LEGKISEBB NÉGYZETES KÖZELÍTÉSE ALAPJÁN

BOZÓKI SÁNDOR

Budapest

A páros összehasonlítások módszere a többszemponútú döntési feladatok megoldásának egy lehetséges eszköze mind a szempontsúlyok meghatározásában, mind az alternatívák értékelésében. A szempontokat páronként összehasonlítva, fontosságaiknak a döntéshozó által megítélt arányait mátrixba rendezve a feladat a súlyvektor meghatározása úgy, hogy annak komponensei valamilyen értelemben jól illeszkedjenek a döntéshozó által megadott értékekhez.

A páros összehasonlítás mátrixból a súlyok kiszámítására leggyakrabban használt sajátvektor módszer (Analytic Hierarchy Process) mellett számos távolságminimalizáló módszer is létezik. Ezek egyike a legkisebb négyzetek módszere, melynek megoldása nemlineáris, nemkonvex függvény feltételes optimalizálását jelenti. A cikkben olyan módszereket mutatunk be a páros összehasonlítás mátrixok legkisebb négyzetes becslésére, amelyek a célfüggvény összes lokális és globális minimumhelyének meghatározására alkalmasak.

1. Páros összehasonlítás mátrixok

A többszemponútú döntési modellekben a cél véges számú alternatíva véges számú szempont szerint történő rangsorolása. A pályázatok versenyeztetése, a vállalati stratégiák közül a legjobb kiválasztása, a közbeszerzési eljárások, adott pozícióra a legalkalmasabb személy kiválasztása olyan gyakorlati problémák, amelyek többszemponútú döntési feladat megoldására vezetnek. A szempontok általában nem egyformán fontosak, szükség van tehát olyan módszerre, amely a szempontokat fontossági súlyokkal látja el úgy, hogy az a döntéshozó céljaival harmóniában álljon. A feladat egyik nehézsége, hogy a fontosságnak nincs általánosan elfogadott mértékegysége, azt csak valamilyen skálával együtt lehet értelmezni. Előfordul, hogy a döntéshozó közvetlenül, számszerűen meg tudja adni a szempontsúlyokat, ezt egyszerű közvetlen becslésnek is nevezi az irodalom [27]. Nagyobb méretű, összetett

feladatoknál azonban nem várható el, hogy a modellező rendelkezésére bocsássa a számszerűsített értékeket. A probléma kisebb részekre történő bontásával azonban elérhető, hogy a döntéshozónak csak egyszerű, világos kérdéseket kell megválaszolnia, azokból mégis előállítható az egész feladat szempontsúly-rendszere. Axiómaként elfogadjuk a preferencia-modellezésben használt feltételt, miszerint a döntéshozó képes két dolog (ami lehet pl. a szempontok fontossága) összehasonlítására: meg tudja mondani, hogy valamelyik jobb (vagy nagyobb) a másiknál, vagy egyformák.

Condorcet [10] és Borda [2] szavazási feladataikban már az 1780-as években bevezették a *páros* (vagy páronkénti) *összehasonlítás* fogalmát, mint az egyéni preferenciák alapján felállított rangsor két eleme közötti viszonyt. A páros összehasonlítás, mint módszer alkalmazási lehetőségeit Kindler [27] történeti és módszertani áttekintése tárgyalja, melyből itt csak a csak legfontosabbakat emeljük ki. A kísérleti pszichológiában az 1920-as években jelent meg e fogalom Thorndike [34] és Thurstone [35] munkáiban. Churchman és Ackoff [9] eljárásában az elemeket először ordinális értelemben rendezni kell, ezután valamelyiket rögzítve és a többivel kardinális értelemben összehasonlítva számszerű eredmények adódnak. Guilford [21] modelljében pusztán ordinális információk alapján kardinális sorrend állapítható meg. Több döntéshozó (csoportos döntéshozatal) esetére dolgozta ki Kendall [25] a róla elnevezett egyetértési együtthatót.

Bár e dolgozatnak nem célja az emberi racionalitás korlátait és paradoxonait firtatni, megjegyezzük, hogy a páronkénti összehasonlítások a döntéshozókkal történő elvégzésének fontos módszertani szempontja, hogy nem mindegy, milyen sorrendben tesszük fel a kérdéseket. A szabályos elrendezés szinte mindig torzít, a véletlenszerű már kevésbé, a Ross-féle elrendezés [32] pedig a véletlennél is kisebb torzítással működik.

A dolgozatban a páros összehasonlítások azon változatát tárgyaljuk, amelyben az elemeket arányskálán hasonlítjuk össze, azaz a döntéshozótól olyan formában várjuk az elemek összehasonlítását, hogy hányszor tekinti az egyiket *jobb*nak vagy *nagyon* *jobb*nak a másiknál [33]. A páronkénti összehasonlításokból felépíthető egy négyzetes mátrix, melynek definíciója a következő:

Definíció. (Páros összehasonlítás mátrix.) Jelölje $\mathbb{R}_+^{n \times n}$ a pozitív valós elemekből álló $n \times n$ -es mátrixok osztályát. Az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 1/a_{13} & 1/a_{23} & 1 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & 1/a_{3n} & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$$

mátrixot páros összehasonlítás mátrixnak nevezzük, ha minden $i, j = 1, \dots, n$ indexre teljesül, hogy

$$(1) \quad a_{ii} = 1,$$

$$(2) \quad a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}.$$

A mátrix a_{ij} eleme azt mutatja meg, hogy a döntéshozó hányszor jobbnak ítéli meg az i -edik objektumot a j -ediknél. (1) alapján az önmagával való összehasonlítás eredménye mindig 1.

A (2) tulajdonság azon a feltételezésen alapul, hogy ha a döntéshozó számára az i -edik objektum a_{ij} -szer akkora, mint a j -edik, akkor a j -edik pontosan $\frac{1}{a_{ij}}$ -szer akkora, mint az i -edik. Az (1)–(2)-ből adódóan n objektum esetén $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ összehasonlítással adható meg a mátrix.

Definíció (Konzisztens páros összehasonlítás mátrix). Ha egy

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{i,j=1,2,\dots,n} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$$

mátrixra (1)–(2)-n túl még

$$(3) \quad a_{ij}a_{jk} = a_{ik}$$

is teljesül minden $i, j, k = 1, \dots, n$ indexre, akkor konzisztens páros összehasonlítás mátrixnak nevezzük. Az (1)–(2) feltételt igen, de (3)-at nem teljesítő mátrixot inkonzisztens mátrixnak nevezzük.

A feladat: az elemek páronkénti összehasonlításának (\mathbf{A} mátrix) ismeretében a w_1, w_2, \dots, w_n súlyok meghatározása, ahol

$$w_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$(4) \quad \sum_{i=1}^n w_i = 1.$$

A súlyokat együttesen a $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ súlyvektorral jelöljük.

A problémára több megoldási lehetőség kínálkozik. Az Analytic Hierarchy Process (AHP) [33] módszertanban a mátrix legnagyobb sajátértékéhez (λ_{\max}) tartozó jobboldali sajátvektor komponensei adják a súlyokat. Más, távolságminimalizáló módszerekben a mátrix valamilyen célfüggvény szerinti legjobb közelítése alapján lehet a súlyokra következtetni. A legkisebb négyzetek módszere [8] és annak relaxált változatai, mint pl. a súlyozott legkisebb négyzetes [8], a logaritmusos legkisebb négyzetes [12, 11], vagy a χ^2 -es [22] feladatok mellett olyan megközelítések találhatók, mint a szinguláris felbontás [19], célprogramozás [5], lineáris programozás [7].

Konzisztens mátrixok esetén minden egyes eljárás ugyanazt az eredményt adja. Inkonzisztens esetben a különböző módszerek által eredményezett súlyvektorok kisebb-nagyobb mértékben eltérnek. Golany és Kress [20] több szempont alapján történő összehasonlító elemzéséből kiderül, hogy minden súlyozási módszernek van előnye és hátránya, egyik sem nevezhető „a legjobb”-nak.

A többi módszerrel ellentétben a legkisebb négyzetes feladatról általában nem mondható el, hogy megoldása egyértelmű [22], [23]. A célfüggvény ugyanis nem feltétlenül konvex, és az eddigiekben publikált eljárásoknál ([23], [15]) jelentős nehézséget okoz a stacionárius pontok meghatározása, mivel azok az iterációs elvű numerikus módszereket használják.

A következő fejezetben olyan módszereket tekintünk át, amelyekkel megoldható a páros összehasonlítás mátrixok legkisebb négyzetes közelítése. Az eljárások előnye, hogy minden lokális és globális minimumhelyet megtalálnak, továbbá indulópont választására nincs szükség.

2. A legkisebb négyzetek módszere

Legyen adott az \mathbf{A} $n \times n$ -es páros összehasonlítás mátrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 1/a_{13} & 1/a_{23} & 1 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & 1/a_{3n} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Keressük azt a $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{R}_+^n$ vektort, amelynek komponenseiből képzett

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & w_1/w_2 & w_1/w_3 & \dots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & 1 & w_2/w_3 & \dots & w_2/w_n \\ w_3/w_1 & w_3/w_2 & 1 & \dots & w_3/w_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & w_n/w_3 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

mátrix Frobenius-normában a legjobban közelíti \mathbf{A} -t. Az optimalizálási feladat tehát:

$$\min \|\mathbf{A} - \mathbf{X}\|_F^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(a_{ij} - \frac{w_i}{w_j} \right)^2,$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1,$$

$$w_1, w_2, \dots, w_n > 0.$$

Vezessük be az x_1, x_2, \dots, x_{n-1} új változókat a következőképpen:

$$(5) \quad x_1 = \frac{w_1}{w_2}, \quad x_2 = \frac{w_1}{w_3}, \quad \dots, \quad x_i = \frac{w_1}{w_{i+1}}, \quad \dots, \quad x_{n-1} = \frac{w_1}{w_n}.$$

Ekkor

$$\frac{w_i}{w_j} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j; \\ x_{j-1}, & \text{ha } i = 1 \text{ és } 1 < j \leq n; \\ \frac{1}{x_{i-1}}, & \text{ha } j = 1 \text{ és } 1 < i \leq n; \\ \frac{x_{j-1}}{x_{i-1}}, & \text{ha } 1 < i, j \leq n, \end{cases}$$

így az \mathbf{X} mátrix x_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) változókkal való felírása a következő:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} \\ \frac{1}{x_1} & 1 & \frac{x_2}{x_1} & \dots & \frac{x_{n-1}}{x_1} \\ \frac{1}{x_2} & \frac{x_1}{x_2} & 1 & \dots & \frac{x_{n-1}}{x_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{x_{n-1}} & \frac{x_1}{x_{n-1}} & \frac{x_2}{x_{n-1}} & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

és az optimalizálási feladat

$$\begin{aligned} \min \|\mathbf{A} - \mathbf{X}\|_F^2 &= f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \\ x_1, x_2, \dots, x_{n-1} &> 0, \end{aligned}$$

alakban írható fel, ahol

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) &= \sum_{j=2}^n \left[(a_{1j} - x_{j-1})^2 + \left(\frac{1}{a_{1j}} - \frac{1}{x_{j-1}} \right)^2 \right] \\ &+ \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \left[\left(a_{ij} - \frac{x_{j-1}}{x_{i-1}} \right)^2 + \left(\frac{1}{a_{ij}} - \frac{x_{i-1}}{x_{j-1}} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Mivel f nyílt tartományon értelmezett differenciálható függvény, az optimalitás elsőrendű szükséges feltétele olyan pont létezése, amelyre

$$(6) \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} = 0.$$

Az f függvény elsőrendű parciális deriváltjai az x_1, x_2, \dots, x_{n-1} változók racionális törtfüggvényei, hisz maga f is az volt. Adott i ($1 \leq i \leq n-1$) indexhez tartozó x_i változó csak az \mathbf{X} mátrix $(i+1)$ -edik sorában és oszlopában fordul elő, ezért az $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ parciális derivált így írható:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} &= \\ &= \frac{\partial \left\{ (a_{i+1,1} - x_i)^2 + (a_{1,i+1} - \frac{1}{x_i})^2 + \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i+1}}^n \left[(a_{i+1,j} - \frac{x_i}{x_{j-1}})^2 + (a_{j,i+1} - \frac{x_{j-1}}{x_i})^2 \right] \right\}}{\partial x_i}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = -2(a_{i+1,i} - x_i) + 2\left(a_{1,i+1} - \frac{1}{x_i}\right) \frac{1}{x_i^2} + \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i+1}}^n \left[-2\left(a_{i+1,j} - \frac{x_i}{x_{j-1}}\right) \frac{1}{x_{j-1}} + 2\left(a_{j,i+1} - \frac{x_{j-1}}{x_i}\right) \frac{x_{j-1}}{x_i^2} \right].$$

Mivel $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ felírásában a nevezőben x_j^2 ($j = 1, 2, \dots, n-1, j \neq i$), valamint x_i^3 szerepel, a $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ -et $\left(x_i^3 \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} x_j^2\right)$ -nel beszorozva a

$$P_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i^3 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} x_j^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i \prod_{j=1}^{n-1} x_j^2, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

többszváltozós polinomokat kapjuk. A P_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) polinomok közös gyökeiket a

$$(7) \quad P_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = 0$$

$$P_2(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = 0$$

$$\vdots$$

$$P_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = 0$$

rendszer megoldásai adják.

A döntési feladat szempontjából csak a pozitív valós $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ gyökök érdekesek, így a (6) és (7) rendszerek egyenértékűek abban az értelemben, hogy egy pozitív valós $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ $(n-1)$ -es pontosan akkor megoldása (6)-nak, ha (7)-nek is.

Ha egy $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_{n-1}^*)$ $(n-1)$ -es f -nek minimumhelye, akkor szükségképpen megoldása a (7) polinomrendszernek is. Fordítva, ha a pozitív $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_{n-1}^*)$ vektor megoldása a (7) polinomrendszernek, az f Hesse-mátrix pozitív definittségének ellenőrzésével tudjuk ellenőrizni, hogy valóban (lokális) minimumhely-e. Ha igen, akkor $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_{n-1}^*)$ -ből (5) és (4) alapján felírható a keresett $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ súlyvektor. Kifejezve ugyanis (5)-ből a w_i ($i = 2, 3, \dots, n$) súlyokat:

$$w_2 = \frac{w_1}{x_1}, \quad w_3 = \frac{w_1}{x_2}, \quad \dots, \quad w_i = \frac{w_1}{x_{i-1}}, \quad \dots, \quad w_n = \frac{w_1}{x_{n-1}},$$

majd az egyenleteket összeadva

$$(8) \quad \sum_{i=2}^n w_i = w_1 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{x_i}.$$

(4) szerint (8) baloldali kifejezése $(1 - w_1)$ -gyel egyenlő, így w_1 -re

$$w_1 = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{x_j}},$$

w_i -re $(1 < i \leq n)$ pedig az (5) megfelelő $(x_{i-1} = \frac{w_1}{w_i})$ egyenletéből

$$w_i = \frac{w_1}{x_{i-1}} = \frac{\frac{1}{x_{i-1}}}{1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{x_j}}$$

adódik. Kaptuk tehát, hogy az LSM -optimális w súlyvektor a (7) polinomrendszer $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_{n-1}^*)$ megoldásából az alábbi formula szerint számolható:

$$w_1 = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{x_j^*}}, \quad w_i = \frac{\frac{1}{x_{i-1}^*}}{1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{x_j^*}}, \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

3. Polinomrendszerek megoldása

A matematikai (főleg geometriai) és fizikai-mérnöki problémák (kinetika és egyensúly) gyakran vezetnek polinomiális rendszerek megoldására, mely – mint a nemlineáris rendszerek megoldása általában – nem könnyű. Jelen fejezet áttekintést ad négy olyan módszerről, amelyek segítségével kisméretű feladatok megoldhatók. Mivel egy adott polinomrendszer összes megoldását keressük, a Newton-iteráción alapuló algoritmusokat nem tárgyaljuk. Megjegyezzük azonban, hogy valamely polinomrendszer-megoldó algoritmus által szolgáltatott megoldás, mely szükségképpen csak közelítő megoldás lehet, a Newton-iteráció indulóértékéül választva tetszőlegesen pontosítható.

3.1. Rezultáns módszer

Bevezetésül idézzük fel Gauss egyik legfontosabb eredményét.

TÉTEL. (Az algebra alaptétele.) Minden nemkonstans komplex $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak van gyöke a \mathbb{C} számtestben.

Legyenek f és g egyváltozós, valós együtthatós polinomok:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n, \\ g(x) &= b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + a_m, \end{aligned}$$

ahol $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$. Az algebra alaptételéből következően f és g felírhatók gyöktényezős szorzatalakban:

$$(9) \quad \begin{aligned} f(x) &= a_0 \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i), \\ g(x) &= b_0 \prod_{j=1}^m (x - \beta_j), \end{aligned}$$

ahol $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$.

Definíció. Az f és g polinomok $R(f, g)$ -vel jelölt **rezultánsa**

$$R(f, g) = a_0^m b_0^n \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (\alpha_i - \beta_j).$$

(9) alapján

$$g(\alpha_i) = b_0 \prod_{j=1}^m (\alpha_i - \beta_j),$$

és hasonlóan,

$$R(f, g) = a_0^m \prod_{i=1}^n g(\alpha_i).$$

A definícióból következik, hogy f -nek és g -nek pontosan akkor van közös gyöke \mathbb{C} -ben, ha $R(f, g) = 0$. Megjegyezzük, hogy a rezultáns definíciója nem szimmetrikus az argumentumokra nézve, igaz viszont, hogy

$$R(g, f) = b_0^n a_0^m \prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^n (\beta_j - \alpha_i) = (-1)^{nm} R(f, g).$$

$R(g, f)$ egy másik alakban történő felírása:

$$R(g, f) = b_0^n \prod_{j=1}^m f(\beta_j).$$

Az alábbi tétel [28] szerint $R(f, g)$ nemcsak f és g gyökeiből, hanem közvetlenül az együttthatókból is számolható.

TÉTEL. Jelölje D a következő (Sylvester-féle) mátrix determinánsát:

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n & & & \\ & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\ & & & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_m & & & \\ & b_0 & b_1 & \dots & b_{m-1} & b_m & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\ & & & b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_m \end{vmatrix}_{(n+m) \times (n+m)},$$

ahol az üresen hagyott elemek 0-kat jelentenek. Ekkor

$$D = R(f, g).$$

Példa. Legyenek f és g

$$f(x) = x^2 - 5x - 14,$$

$$g(x) = x^2 - 6x - 7.$$

Az előző tétel szerint

$$R(f, g) = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -14 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -14 \\ 1 & -6 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -7 \end{vmatrix} = 0,$$

tehát f és g -nek kell, hogy legyen közös gyöke ($x = 7$ valóban az). Mindezt anélkül kaptuk, hogy ki kellett volna számítanunk f és g gyökeit.

Legyen most adott a következő egyenletrendszer:

$$(10) \quad f(x, y) = 0,$$

$$(11) \quad g(x, y) = 0,$$

ahol $f, g \in \mathbb{R}[x, y]$ kétváltozós, valós együtthatós polinomok. Ha csak x -et tekintenénk változónak, y -t pedig paraméternek, akkor az f -ben és g -ben, mint egyváltozós polinomokban szereplő tagok sorbarendezhetők x kitevőjének nagysága szerint:

$$(12) \quad f(x, y) = a_0(y)x^k + a_1(y)x^{k-1} + \dots + a_{k-1}(y)x + a_k(y),$$

$$(13) \quad g(x, y) = b_0(y)x^l + b_1(y)x^{l-1} + \dots + b_{l-1}(y)x + a_l(y),$$

ahol $a_0(y), a_1(y), \dots, a_k(y), b_0(y), b_1(y), \dots, b_l(y) \in \mathbb{R}[y]$ valós együtthatós egyváltozós polinomjai y -nak. Felírható tehát $R_x(f, g)$, mint az f és g egyváltozós polinomok rezultánsa:

$$R_x(f, g) = \begin{vmatrix} a_0(y) & a_1(y) & a_2(y) & \dots & a_k(y) & & & \\ & a_0(y) & a_1(y) & \dots & a_{k-1}(y) & a_k(y) & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\ b_0(y) & b_1(y) & b_2(y) & \dots & b_l(y) & & & \\ & b_0(y) & b_1(y) & \dots & b_{l-1}(y) & b_l(y) & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\ & & & b_0(y) & b_1(y) & b_2(y) & \dots & b_l(y) \end{vmatrix} = P(y),$$

ahol $P(y) \in \mathbb{R}[y]$ valós együtthatós egyváltozós polinomja y -nak.

Tegyük fel, hogy az $x = \alpha, y = \beta$ megoldása a (10)–(11) rendszernek. Behegytetésítve $y = \beta$ -t (12)–(13)-be, az $f(x, \beta)$ és $g(x, \beta)$ egyváltozós polinomokat kapjuk, melyek közös gyöke α . Ha az $a_0(\beta), b_0(\beta)$ főegyütthatók nem nullák, akkor az $f(x, \beta)$ és $g(x, \beta)$ polinomok rezultánsa az alábbiak szerint írható fel:

$$R(f(x, \beta), g(x, \beta)) = \begin{vmatrix} a_0(\beta) & a_1(\beta) & a_2(\beta) & \dots & a_k(\beta) & & & \\ & a_0(\beta) & a_1(\beta) & \dots & a_{k-1}(\beta) & a_k(\beta) & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\ b_0(\beta) & b_1(\beta) & b_2(\beta) & \dots & b_l(\beta) & & & \\ & b_0(\beta) & b_1(\beta) & \dots & b_{l-1}(\beta) & b_l(\beta) & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\ & & & b_0(\beta) & b_1(\beta) & b_2(\beta) & \dots & b_l(\beta) \end{vmatrix},$$

mely rezultánst kifejtve β -nak egy $P(\beta)$ polinomját kapjuk. Mivel α közös gyöke $f(x, \beta)$ és $g(x, \beta)$ -nak, azt kaptuk, hogy $P(\beta) = 0$, azaz β gyöke a P -nek.

Másfelől, tegyük fel, hogy $P(y) = R_x(f, g)$ polinomnak gyöke az $y = \beta$. Ha az $a_0(\beta)$ és $b_0(\beta)$ főegyütthatók nem nullák, akkor $P(\beta) = R(f(x, \beta), g(x, \beta))$. De $P(\beta) = 0$, így $f(x, \beta)$ -nak és $g(x, \beta)$ -nak szükségképpen van közös gyöke.

3.2. Általánosított rezultáns módszer

A rezultáns-módszer hátránya, hogy csak két egyenletből álló, kétváltozós rendszerek redukálhatók egyváltozós polinom valós gyökeinek megkeresésére. Az általánosított rezultánsok elmélete Bezout, Dixon [13], Kapur, Saxena és Young [24] nevéhez fűződik. Az általánosított, vagy Dixon-rezultáns szerepe megegyezik a rezultánséval: adott polinomrendszer esetén olyan indikátort keresünk, amely felírható a polinomok együtthatóinak függvényeként, továbbá pontosan akkor 0, ha a polinomrendszernek van megoldása. Az eljárás leírása lényegesen hosszabb, mint a

rezultáns módszeré, ezért itt inkább az algoritmus implementációjával és a futási tapasztalatokkal foglalkozunk.

Robert H. Lewis [30] létrehozta a *Fermat* computer algebra programcsomagot, melyet kifejezetten nagyméretű polinomiális és mátrix-számításokra tervezett. A 4×4 -es mátrixok LSM-approximációjából származó 3 egyenletből álló 3 ismeretlenes polinomrendszer a *Fermat* szoftver segítségével megoldható [4]. A kapott egyváltozós polinom foka 26 és 137 között változik, az adott mátrix elemeinek függvényében. Ezen egyváltozós polinom pozitív valós gyökeinek megkeresésére a *Maple* program kielégítő eredményt ad. Az eddigi tapasztalatok alapján a pozitív valós gyökök száma 1 és 10 között mozog. Ez lehetőséget ad arra, hogy egyszerű visszahelyettesítéssel az eredeti 3 egyenletből álló 3 ismeretlenes polinomrendszer 3 egyenletből álló 2 ismeretlenes polinomrendszerre redukálódjon. A 3 egyenletből egyszerre csak kettőt tudunk megoldani a rezultáns módszer segítségével, viszont képezve a 3 lehetséges egyenletpár megoldásainak metszetét az eredeti polinomrendszer közös gyökei immáron rendelkezésünkre állnak.

3.3. Gröbner-bázisok

A polinomgyűrűk és ideálok tanulmányozására vezette be Buchberger [6] a Gröbner-bázis fogalmát, mely elnevezést PhD témavezetője iránti tisztelete jeléül választotta.

Egy adott polinomrendszerhez tartozó Gröbner-bázis egy az eredetivel ekvivalens rendszer, azaz pontosan ugyanazok a gyökei, mint az eredetinek. A Gröbner-bázisbeli polinomrendszer azonban rendelkezik bizonyos tulajdonságokkal is, melyek jól használhatók a polinomokkal való osztás és egyéb vizsgálatok során. A *Maple* szoftverben írt programjaink futási eredményei azt mutatják, hogy a 3×3 -as páros összehasonlítás mátrixokból kapott polinomrendszerre még működik az algoritmus, nagyobb méretekre azonban memória-túlsordulás miatt leáll.

3.4. Homotópiás módszer

Az utóbbi 25 év során a homotópiás kontinuitási módszerek megbízható és hatékony technikává fejlődtek a polinomiális rendszerek összes megoldásának meghatározására.

Garcia és Zangwill [18], valamint tőlük függetlenül Drexler [14] javasolta elsőként a homotópiás módszerek alkalmazását polinomiális rendszerek összes gyökének numerikus meghatározására. A homotópiás kontinuitás módszer alapfogolata a következő: Adott $\mathbf{P} = (P_1, P_2, \dots, P_n)$,

$$P_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

$$P_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

$$\vdots$$

$$P_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

polinomrendszerhez definiáljuk a $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$

$$Q_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

$$Q_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

$$\vdots$$

$$Q_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

polinomrendszert úgy, hogy \mathbf{Q} gyökeit már ismerjük. Legyen $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ és definiáljuk a

$$H(\mathbf{x}, t) = (1 - t)\mathbf{Q}(\mathbf{x}) + t\mathbf{P}(\mathbf{x}) = 0$$

parametrikus egyenletrendszert, ahol $0 \leq t \leq 1$. \mathbf{Q} megválasztásánál arra kell ügyelni, hogy a következő tulajdonságok teljesüljenek:

- (1) trivialitás: $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = 0$ megoldásai ismertek;
- (2) simaság: a $H(\mathbf{x}, t) = 0$ ($0 \leq t \leq 1$) megoldáshalmaza véges sok sima útból áll, melyek mindegyike t -vel paraméterezhető;
- (3) elérhetőség: a $H(\mathbf{x}, 1) = \mathbf{P}(\mathbf{x}) = 0$ rendszer minden izolált megoldása elérhető valamely $t = 0$ -ból induló út mentén, mely út kezdőpontja tehát a $H(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}) = 0$ rendszer egy megoldása.

Jelölje d_i a P_i polinom teljes fokát,

$$d_i = \deg P_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

és legyen $d = d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_n$. A többváltozós polinomokra vonatkozó Bezout-tétel értelmében a P_1, P_2, \dots, P_n polinomok teljes fokainak szorzata (d) felső becslést ad a közös gyökök számára (multiplicitással) \mathbb{C}^n -ben. \mathbf{Q} választására gyakran a következő hatványfüggvények adódnak:

$$Q_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1 x_1^{d_1} = 0,$$

$$Q_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_2 x_2^{d_2} = 0,$$

$$\vdots$$

$$Q_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_n x_n^{d_n} = 0,$$

ahol $d_i = \deg P_i(\mathbf{x})$, $i = 1, 2, \dots, n$, az a_j, b_j , $j = 1, 2, \dots, n$ pedig tetszőleges, általában véletlenszerűen generált komplex számok. Ezek teljesítik a fenti három tulajdonságot, így a $\mathbf{P}(\mathbf{x}) = 0$ gyökei a $H(\mathbf{x}, t) = 0$ ($0 \leq t \leq 1$) megoldásaként adódó d számú út végpontjai között keresendők.

A tapasztalatok szerint azonban d értéke nagyságrendekkel nagyobb lehet, mint a keresett gyökök száma, és az utak többsége nem tényleges gyökhöz konvergál, hanem a végtelenbe. A polinomrendszerek gyökszámának jobb becslésére szolgál Bernshtein [1], Kushnirenko [29] és Khovanskii [26] módszere, amely a kisebb számú út vizsgálatával a homotópiás módszert hatékonyabbá teszi.

E cikk szerzőjének lehetősége nyílt Tien-Yien Li és Tangan Gao [31, 17] algoritmusának tesztelésére. Az 1. táblázatban összefoglaltuk a páros összehasonlítás mátrixokra felírt legkisebb négyzetes közelítés feladatából adódó polinomrendszerek megoldásának átlagos adatait és a homotópiás algoritmus futási idejét 1 GHz-es processzoron.

A 3×3 -as eset elemzésében [3] található olyan mátrix-konstrukció, amelyhez tartozó *LSM*-feladatnak négy lokális minimumhelye van. Ezek azonban gyakorlati szempontból nem tűnnek elsődleges fontosságúnak. A 3×3 -asnál nagyobb esetben néhány tapasztalati (konkrét feladatra döntéshozó által megadott), valamint véletlenszerűen generált páros összehasonlítás mátrixokat vizsgáltunk. Számításaink szerint a tapasztalati mátrixok esetén a legkisebb négyzetes súlyvektor az esetek döntő részében egyértelmű, de még a véletlenszerűen generált mátrixok esetében is csak elvétve fordult elő 2 megoldásnál több.

A mátrix mérete ($n \times n$)	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$
CPU time	0.05 mp.	0.5 mp.	20 mp.	14 perc	10 óra	3 nap
Közös gyökök száma	24	224	1840	14000	$\sim 10^5$	$\sim 10^6$
Közös pozitív valós gyökök száma	1 és 7 között					

1. táblázat. Polinomrendszerek megoldása ($n = 3, 4, \dots, 8$)

4. Kutatási lehetőségek

Döntési szempontból alapvető fontosságú annak biztosítása, hogy egy páros összehasonlítás mátrixból számolt súlyvektor egyértelmű legyen, ami az 1. fejezetben említett súlyozási módszerek esetében biztosított. A legkisebb négyzetes megoldás egyértelműségére vonatkozó szükséges és elégséges feltétel azonban még nem ismert. A páros összehasonlítás mátrixok egy osztályában a megoldás nem-egyértelműségére Farkas és Rózsa [16] adott elégséges feltételt.

Döntésméleti és alkalmazási szempontból is lényeges kérdés a különböző súly-meghatározó módszerek összehasonlítása. Célunk, hogy a döntési feladatok jellegzetes vonásainak, típusainak leginkább megfelelő módszert ki tudjuk választani. Ezen jellegzetességek feltérképezése és azonosítása jelenleg is kutatás tárgya.

5. Összegzés

A cikkben egy, a többszempontú döntési feladatok szempontsúly-rendszerének kialakítására szolgáló módszert vizsgáltunk. Négy eljárást tekintettünk át a páros összehasonlítás mátrixok legkisebb négyzetes közelítéséből (*LSM*) adódó súlyok meghatározására. A kapcsolódó nemlineáris célfüggvény nemkonvexitása miatt az optimumhely általában nem egyértelmű. Az általunk tárgyalt módszerek az összes lokális és globális minimumhely megkeresésére alkalmasak. Tapasztalataink alapján a 3×3 -as mátrixok esetére használható a rezultáns-módszer és a Gröbner-bázisok, 3×3 -as és 4×4 -es esetben az általánosított rezultánsokat alkalmazó Fermat szoftver, 3×3 -astól 8×8 -as méretig pedig a homotópiás kontinuitási módszer.

A kutatás jelenlegi fázisában a 3×3 -as esetben tudunk páros összehasonlítás mátrixokat nagy számban generálni, majd azokból automatikusan súlyokat számolni. Ez lehetőséget ad a súlyozás szabályszerűségeinek feltárására, valamint a véletlen és a döntéshozó által megadott mátrixok összevetésére. 3×3 -as mátrixokra a tárgyalt 4 módszer mindegyike lényegében azonnali eredményt ad, ezért kis méretű döntési problémák szempont-súlyozásában felhasználhatók.

A 4×4 -estől 8×8 -as méretig a súlyok számítása egyedileg történik, ezért a statisztikai jellegű elemzés lehetősége korlátozott. A futási eredmények (különösen $n = 7, 8$ esetében) azt mutatják, hogy döntési feladatok valós időben történő megoldására még nem alkalmazhatók, az általunk alkalmazott módszertan a kutatás fázisában van.

A legkisebb négyzetes közelítésből számolt súlyvektor ismeretében lehetőség nyílik e módszer sajátosságainak feltárására valamint más súlymeghatározó módszerekkel való összevetésre. A módszerek előnyeinek és hátrányainak pontosabb ismeretével közelebb kerülünk ahhoz a célhoz, hogy a döntési feladattípusok alapfeltevéseinek megfelelően ki tudjuk jelölni az alkalmazható súlymeghatározó módszerek csoportját.

Köszönettel tartozom Tangan Gao-nak (Michigan State University) a homotópiás algoritmus rendelkezésemre bocsátásáért, valamint Stefán Péternek (Nemzeti Információs Infrastruktúra Fejlesztési Program (NIIF) Szuperszámítógép Központ) a program futtatásában nyújtott technikai segítségéért.

A tanulmány az Országos Tudományos Kutatási Alapprogramok OTKA-T043-276 és OTKA-T043241 számú pályázatainak támogatásával készült.

Hivatkozások

- [1] Bernshtein, D. N., The number of roots of a system of equations, *Functional Analysis and its Applications* **9** (1975) 183–185.
- [2] Borda, J. C. de, Mémoire sur les élections au scrutin, *Histoire de l'Académie Royale des Sciences* (Paris, 1781).
- [3] Bozóki, S., A method for solving LSM problems of small size in the AHP, *Central European Journal of Operations Research* **11** (2003) 17–33.
- [4] Bozóki, S. and Lewis, R. H., Solving the Least Squares Method problem in the AHP for 3×3 and 4×4 matrices, *Central European Journal of Operations Research* **13** (2005), 255–270.
- [5] Bryson, N. A goal programming method for generating priority vectors, *Journal of the Operational Research Society* **46**, No. 5 (1995) 641–648.
- [6] Buchberger, B., An algorithmic method in polynomial ideal theory, in: N. K. Bose (editor), *Multidimensional System Theory*, 184–232 (D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Boston, Lancaster, 1985).
- [7] Chandran, B., Golden, B. and Wasil, E., Linear programming models for estimating weights in the analytic hierarchy process, *Computers & Operations Research* **32** (2005) 2235–2254.
- [8] Chu, A. T. W., Kalaba, R. E. and Spingarn, K., A comparison of two methods for determining the weight belonging to fuzzy sets, *Journal of Optimization Theory and Applications* **4** (1979) 531–538.
- [9] Churchman, C. W., Ackoff, R. L. and Arnoff, L. E., *Introduction to Operations Research* (Wiley, New York, 1957).
- [10] Condorcet, M., Essai sur l'Application de l'Analyse à la Probabilité des Décisions Rendues à la Pluralité des Voix, Paris, 1785.
- [11] Crawford, G. and Williams, C., A note on the analysis of subjective judgment matrices, *Journal of Mathematical Psychology* **29** (1985) 387–405.
- [12] De Jong, P., A statistical approach to Saaty's scaling methods for priorities, *Journal of Mathematical Psychology* **28** (1984) 467–478.
- [13] Dixon, A. L., The eliminant of three quantities in two independent variables, *Proceedings of the London Mathematical Society* **7** (1908) 50–69, 473–492.
- [14] Drexler, F. J., Eine Methode zur Berechnung sämtlicher Lösungen von Polynomgleichungssystemen, *Numerische Mathematik* **29** (1978) 45–58.
- [15] Farkas, A., Lancaster, P. and Rózsa, P., Consistency adjustment for pairwise comparison matrices, *Numerical Linear Algebra with Applications* **10** (2003) 689–700.
- [16] Farkas, A. and Rózsa, P., On the Non-Uniqueness of the Solution to the Least-Squares Optimization of Pairwise Comparison Matrices, *Acta Polytechnica Hungarica, Journal of Applied Sciences at Budapest Polytechnic Hungary* **1** (2004) 1–20.
- [17] Gao, T., Li, T. Y. and Wang, X., Finding isolated zeros of polynomial systems in \mathbb{C}^n with stable mixed volumes, *Journal of Symbolic Computation* **28** (1999) 187–211.
- [18] Garcia, C. B. and Zangwill, W. I., Finding all solutions to polynomial systems and other systems of equations, *Mathematical Programming* **16** (1979) 159–176.
- [19] Gass, S. I. and Rapcsák, T., Singular value decomposition in AHP, *European Journal of Operational Research* **154** (2004) 573–584.

- [20] Golany, B. and Kress, M., A multicriteria evaluation of methods for obtaining weights from ratio-scale matrices, *European Journal of Operational Research* **69** (1993) 210–220.
- [21] Guilford, J. P., *Psychometric Methods* (McGraw-Hill Book, New York, 1936).
- [22] Jensen, R. E., Comparison of Eigenvector, Least squares, Chi square and Logarithmic least square methods of scaling a reciprocal matrix (Working Paper 153, 1983).
<http://www.trinity.edu/rjensen/127wp/127wp.htm>
- [23] Jensen, R. E., An Alternative Scaling Method for Priorities in Hierarchical Structures, *Journal of Mathematical Psychology* **28** (1984) 317–332.
- [24] Kapur, D., Saxena, T. and Yang, L., Algebraic and geometric reasoning using Dixon resultants, in: *Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation* (A.C.M. Press, 1994).
- [25] Kendall, M. G., *Rank Correlation Methods* (C. Griffin & Co., London, 1948).
- [26] Khovanskii, A. G., Newton polyhedra and the genus of complete intersections, *Functional Analysis and its Applications* **12** (1978) 38–46.
- [27] Kindler, J. és Papp, O., *Komplex rendszerek vizsgálata – Összemérési módszerek* (Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1977).
- [28] Kuros, A. G., *Felsőbb algebra* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1971).
- [29] Kushnirenko, A. G., Newton polytopes and the Bézout theorem, *Functional Analysis and its Applications* **10** (1976) 233–235.
- [30] Lewis, R. H., Computer algebra system *Fermat*, <http://www.bway.net/~lewis/>
- [31] Li, T. Y., Numerical solution of multivariate polynomial systems by homotopy continuation methods, *Acta Numerica* **6** (1997) 399–436.
- [32] Ross, R. T., Optimum orders for the presentation of pairs in the method of paired comparison, *Journal of Educational Psychology* **25** (1934) 375–382.
- [33] Saaty, T. L., *The analytic hierarchy process* (McGraw-Hill, New York, 1980).
- [34] Thorndike, E. L., A Constant Error in Psychological Ratings, *Journal of Applied Psychology* **4** (1920) 25–29.
- [35] Thurstone, L. L., The Method of Paired Comparisons for Social Values, *Journal of Abnormal and Social Psychology* **21** (1927) 384–400.

(Beérkezett: 2005. április 8.)

BOZÓKI SÁNDOR

MTA SZTAKI

OPERÁCIÓKUTATÁS ÉS DÖNTÉSI RENDSZEREK LABORATÓRIUM

1518 BUDAPEST, PF. 63

bozoki@oplalab.sztaki.hu

WEIGHTS FROM THE LEAST SQUARES APPROXIMATION OF PAIRWISE
COMPARISON MATRICES

SÁNDOR BOZÓKI

The method of pairwise comparisons is one of the tools for determining the weights of attributes or evaluating the alternatives in Multi Attribute Decision Making. The decision maker is requested to compare pairwise the importance of the attributes, then the rates are arranged in a matrix. The aim is to find the weight vector which best reflects the values given by the decision maker.

There exist many distance minimizing methods, besides the Eigenvector Method (Analytic Hierarchy Process) for determining weights from a pairwise comparison matrix. One of them is the Least Squares Method, the solution of which leads to the optimization of a nonlinear, non-convex function. In the paper, methods for solving the problem of least squares approximation of pairwise comparison matrices are presented. All methods are suitable for finding all local and global optima.